SF1624 Algebra och geometri

Första föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

26 oktober, 2009

Översikt

Kurspresentation

Komplexa tal

Kursmålen

Efter genomgången kurs ska studenten vara förtrogen med grundläggande algebra och linjär algebra. Det innebär att studenten ska kunna:

- Räkna med komplexa tal
- Lösa polynomekvationer med hjälp av faktorsatsen
- Genomföra enklare induktionsbevis
- Förstå, tolka och använda grundbegreppen: det linjära rummet $\mathbf{R}^n$, linjärt beroende och oberoende, bas, linjär avbildning, matris, determinant, egenvärde och egenvektor
- Lösa linjära ekvationssystem med Gauss-Jordans metod

Kursmålen (forts)

- Förstå och behärska grundläggande matriskalkyl och determinantkalkyl
- Använda minstakvadratmetoden för att lösa överbestämda ekvationssystem.
- Beräkna egenvärden och motsvarande egenvektorer och använda dem för att diagonalisera matriser
- Använda skalärprodukt och vektorprodukt för att lösa geometriska problem i planet och rummet

Kursmålen (forts)

Dessutom ska studenten ha tillägnat sig några övergripande kunskaper och insikter, till exempel

- Ha fått en inledande träning på att genomföra matematiska resonemang och presentera matematik muntligt och skriftligt
- Ha fått någon träning på att ställa upp matematiska modeller för verkliga förlopp i termer av de grundläggande begreppen, tolka resultat och göra rimlighetsbedömningar
- Ha inblick i hur några matematiska verktyg och matematiskt tänkande kommer till användning inom några tillämpningar som ligger utbildningen nära.

Kursinnehåll

- Komplexa tal, polynom, induktionsbevis.
- Linjära ekvationssystem, matriser och determinanter;
- Cramers regel. Invers matris.
- Vektorprodukt, skalärprodukt och geometri i $\mathbf{R}^2$ och $\mathbf{R}^3$, räta linjer och plan.
- Gram-Schmidts metod och projektioner.
- Linjära avbildningar, egenvärden och egenvektorer,
- Basbyten och matrisrepresentation av linjära avbildningar.
- Diagonalisering av matriser.

Kurslitteratur

- *Linjär algebra med geometri* av Lennart Andersson mfl. (Studentlitteratur)
- *Kompletteringskompendium* av Tomas Ekholm (Inst. för matematik, KTH)

Båda finns att få tag på i kårbokhandeln.

Undervisning

- 25 Föreläsningar à 2 timmar
- 12 Övningar à 2 timmar i tre grupper

Examination

- 2 kontrollskrivningar (9 och 23 november)
- 1 inlämningsuppgift - redovisning 7 december
- Tentamen, 15 december kl 14.00-19.00

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**Fx**
Total poäng	31	26	21	18	16	14
varav från del B	11	7	3	-	-	-

Reella och komplexa tal

Vi har vant oss att hantera olika typer av tal:

- Naturliga tal - $\mathbb{N}$
- Hela tal - $\mathbb{Z}$
- Rationella tal - $\mathbb{Q}$
- Reella tal - $\mathbb{R}$

Räknelagar

Dessa talsystem uppfyller några viktiga räkneregler tillsammans med addition och multiplikation, tex:

- nolla, 0, och etta 1, $0 + a = a + 0 = a$, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
- Associativitet - $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Kommutativitet - $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$
- Distributiva lagar - $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Vi ska ta ett steg längre och gå från reella talen, $\mathbb{R}$, till de komplexa talen, $\mathbb{C}$.

Andragradsekvationer

Vi kan lösa andragradsekvationer genom kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned} x^2 + ax + b = 0 \quad & \iff \quad (x + \tfrac{a}{2})^2 - \tfrac{a^2}{4} + b = 0 \\ & \iff \quad (x + \tfrac{a}{2})^2 = \tfrac{a^2}{4} - b \\ & \iff \quad x + \tfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{a^2}{4} - b} \\ & \iff \quad x = -\tfrac{a}{2} \pm \sqrt{\tfrac{a^2}{4} - b} \end{aligned}$$

Det fungerar bra så länge

$$\frac{a^2}{4} - b \geq 0$$

eftersom kvadratroten är definierad då.

Imaginära tal

Det går att komma vidare genom att införa imaginära tal, som kvadratrötter ur de negativa talen. Vi låter i - den imaginära enheten vara en lösning till ekvationen

$$x^2 = -1,$$

dvs ett ”tal” som har egenskapen att

$$i^2 = -1.$$

Obs! Även $-i$ är en kvadratrot till -1.

komplexa tal

Om vi räknar med vanliga reella tal tillsammans med de imaginära talen fungerar de vanliga räknelagarna och vi har fått de komplexa talen

$$\mathbb{C} = \{x + yi | x, y \in \mathbb{R}\}$$

Addition och multiplikation

Vi kan addera komplexa tal genom

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

dvs genom att addera realdel och imaginärdel var för sig.
Vi multiplcierar genom

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) &= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i,\end{aligned}$$

där vi använder att $i^2 = -1$.

Andragradsekvationer igen

Vi kan nu lösa alla andragradsekvationer med reella koefficienter:

$$x^2 + ax + b = 0$$

har rötterna

$$-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

om $a^2 \geq 4b$ och

$$-\frac{a}{2} \pm i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$$

om $a^2 < 4b$.

Ännu fler andragradsekvationer

Kan vi lösa ekvationen $z^2 = i$? VI kan prova att skriva $z = x + iy$ och får då

$$x^2 - y^2 + 2xyi = i$$

och om x och y är reella tal måsta vi ha

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 0 \\ 2xy & = & 1. \end{cases}$$

Den första ekvationen ger $x = \pm y$ och den andra ger då att de måste ha samma tecken och att

$$x^2 = \frac{1}{2}.$$

Alltså får vi lösningen $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$.